ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ

- Εκθετική κατανομή

$X \sim Εκθ(\theta)$, $\theta > 0$

σππ

$$f_X(x) = \begin{cases} \theta e^{-\theta x}, & x > 0 \\ 0, & αλλού \end{cases}$$

x: χρονος μεταξύ δύο διαδοχικών καταστάσεων / αφίξεων

Γενίκευση της Εκθετικής κατανομής

- Γάμμα κατανομή

$X \sim G(a, b)$, $a, b > 0$

σππ

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b^a \Gamma(a)} \cdot x^{a-1} \cdot e^{-x/b}, & x > 0 \\ 0, & αλλού \end{cases}$$

x: χρονος που μεσολαβει για περ/ρες απο δύο διαδοχ. αφίξεις

για παράδειγμα γέννηση μέχρι θάνατος. Μέχρι να φθάσουμε στο θάνατο θα υπάρξουν και άλλες αλλαγές στο ενδιάμεσο (πχ αρρωστια 1, 2, ...)

Γ — * — * — ... — Θ

Παρατήρηση:

$Εκθ(\theta) \equiv G(1, \frac{1}{\theta})$

- Κατανομή Χι-τετράγωνο

$\chi_v^2 := \sum_{i=1}^{v} X_i^2$, $X_i \sim N(0,1)$ και X_i ανεξάρτητα

v βαθμοί ελευθερίας

σππ

$$f_{\chi_v^2}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^{v/2} \cdot \Gamma(\frac{v}{2})} x^{\frac{v}{2}-1} \cdot e^{-x/2}, & x > 0 \\ 0, & αλλού \end{cases}$$

Παρατήρηση:

$\chi_v^2 \equiv G(\frac{v}{2}, 2)$

Συνάρτηση Γάμμα:

$$\Gamma(\alpha) := \int_0^{+\infty} x^{a-1} \cdot e^{-x}\, dx \ , \ a>0$$

Ισχύει ο αναδρομικός τύπος
$\Gamma(a) = (a-1)\cdot\Gamma(a-1)$, $a>1$ και $\Gamma(n) = (n-1)!$, $n\in\mathbb{N}$
Κάτι ακόμα που ισχύει:
$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

Συνάρτηση Βήτα

$$B(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}\cdot(1-x)^{b-1}\,dx$$

Σύνδεση αυτών των δύο συναρτήσεων

$$B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\cdot\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

Αλλαγή Μεταβλητών:

• Έστω έχουμε τ.μ. X με γνωστή κατανομή (γνωστή Ασκ, σππ, κλπ)
Ζητείται η κατανομή της τ.μ. $Y = g(X)$
Μέθοδος του Μετασχηματισμού
Πρόταση
Έστω συνεχής τ.μ. X με σππ f_X και σύνολο τιμών το διάστημα $I\subseteq\mathbb{R}$. Θεωρούμε το μετασχηματισμό $y = g(x)$ (το μετασχ. δηλ. g που μετασχηματίζει το x στο y) και υποθέτουμε ότι ισχύουν:
i) g 1-1 μετασχημ. του I στο $g(I) = \{y : y = g(x), x\in I\}$
ii) Η $\frac{d}{dy} g^{-1}(y) \neq 0$ και συνεχής τότε η σππ της τ.μ. $Y = g(X)$ δίνεται από την έκφραση:

$$f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y))\left|\frac{d g^{-1}(y)}{dy}\right| \ , \ y\in g(I)$$

Παραδείγματα:

ΜΕΘΟΔΟΣ ΣΠΠ:

1) Έστω X η τμ που ακολουθεί την κατανομή Pareto με σππ
$f_X(x) = \theta x^{-\theta-1}$, $x>1$, $\theta>0$
Να βρεθεί η κατανομή της τμ $y=\log x$

ΛΥΣΗ

Έστω μετασχηματισμός $y=g(x)=\log x$
Τιμές της x: $x>1$ με σύνολο τιμών $I=(1,+\infty)$
Τιμές της Y: $y>0$ (όντας λογάριθμος) με $g(I)=(0,+\infty)$
Εξετάζουμε
i) Η λογαριθμική είναι 1-1 άρα ο μετασχηματισμός είναι 1-1
ii) $y=\log x \overset{x>1}{\Leftrightarrow} x=e^y>1 \overset{y>0}{\Rightarrow} g^{-1}(y)=e^y$, $y>0$
$\frac{d}{dy}(e^y)=e^y\neq 0$ και συνεχής.

Άρα, η σππ της y είναι

$$f_Y(y)=f_X(g^{-1}(y))\left|\frac{dg^{-1}(y)}{dy}\right| = f_X(e^y)\,|e^y| = \theta(e^y)^{-\theta-1}\cdot e^y,\ y>0$$

$$\Rightarrow f_Y(y)=\theta e^{-\theta y},\ y>0 \Rightarrow Y\sim \text{Εκθ}(\theta)$$

2) Έστω συνεχής τμ X με ομοιόμορφη κατανομή στο $(0,1)$
Να προσδιοριστεί η κατανομή της τμ: $Y=e^X$
(Απ: $f_Y(y)=\frac{1}{y}$, $y\in(1,e)$)

Να γίνει η (2) σαν άσκηση.

ΜΕΘΟΔΟΣ Α.Σ.Κ.

3) Έστω τμ X με ασκ F_X. Να προσδιοριστεί η κατανομή της τμ $Y=F_X(x)$

ΛΥΣΗ

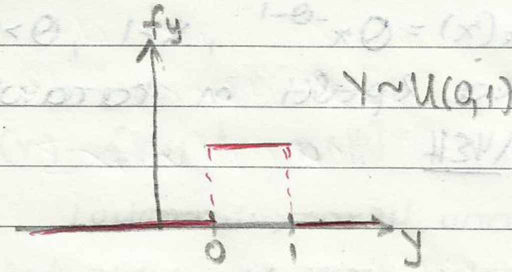
$$F_Y(y) := P(Y\leq y) = P(F_X(x)\leq y) \underset{\exists F_X^{-1}}{\overset{F_X \uparrow}{=\!=}} P(F_X^{-1}(F_X(x))\leq F_X^{-1}(y)) =$$

$$= P(x\leq F_X^{-1}(y)) := F_X(F_X^{-1}(y)) = y$$

Αρα, $F_Y(y) = y$

$$f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy} = \frac{d}{dy}(y) = 1 \;, \; y \in [0,1]$$

Αρα,
$$f_Y(y) = \begin{cases} 1 \;, & y \in [0,1] \\ 0 \;, & \text{αλλού} \end{cases}$$



Μπορούμε να ανατρέξουμε και στο βιβλίο του Κ. Ζωγράφου Εισαγωγή στις πιθανότητες για περισσότερα.

ΚΑΤΑΝΟΜΗ MAX ΚΑΙ MIN ΤΥΧΑΙΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

Έστω ανεξάρτητες τμ. $X_1, X_2, \dots, X_n$ και ισόνομες
$X_{(n)} = \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ και $X_{(1)} = \min\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$
Ποια η κατανομή των $X_{(n)}$ και $X_{(1)}$;;

ΠΡΟΤΑΣΗ: Έστω ανεξάρτητες και ισόνομες τμ $X_1, \dots, X_n$ με κατανομή F_X (ασκ) ή f_X (σπп). Τότε, η κατανομή του μεγίστου: $f_{X_{(n)}}(x) = n \cdot [F_X(x)]^{n-1} \cdot f_X(x)$ και η κατανομή του ελαχίστου: $f_{X_{(1)}}(x) = n[1 - F_X(x)]^{n-1} \cdot f_X(x)$.

Απόδειξη

$$F_{X_{(n)}}(x) := P(X_{(n)} \le x) = P(\max\{X_1, \dots, X_n\} \le x) = P(X_i \le x, \, i=1, \dots, n)$$
$$= P(X_1 \le x \text{ και } X_2 \le x \text{ και } \dots X_n \le x) \overset{\text{ανεξ}}{=} \prod_{i=1}^{n} P(X_i \le x) =$$
$$= \prod_{i=1}^{n} F_{X_i}(x) \overset{\text{ισονομ}}{=} \prod_{i=1}^{n} F_X(x) = (F_X(x))^n$$

Αρα, $F_{X_{(n)}}(x) = (F_X(x))^n \Rightarrow f_{X_{(n)}}(x) = \frac{d}{dx}(F_{X_{(n)}}(x)) =$
$$= \frac{d}{dx}((F_X(x))^n) = n \cdot (F_X(x))^{n-1} \cdot \frac{d}{dx} F_X(x) = n \cdot [F_X(x)]^{n-1} \cdot f_X(x)$$

Ομοια, για το ελάχιστο:

$$F_{X_{(1)}}(x) := P(X_{(1)} \le x) = P(\min\{X_1, \dots, X_n\} \le x) =$$
$$= 1 - P(\min\{X_1, \dots, X_n\} \ge x) = 1 - P(X_i \ge x, \, i=1, \dots, n) =$$
$$= 1 - P(X_1 \ge x, X_2 \ge x, \dots, X_n \ge x) \overset{\text{ανεξ}}{=} 1 - \prod_{i=1}^{n} P(X_i \ge x) =$$
$$= 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - P(X_i \le x)) = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - F_{X_i}(x)) \overset{\text{ισον.}}{=} 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - F_X(x)) =$$
$$= 1 - (1 - F_X(x))^n$$

Άρα, $F_{X_{(1)}}(x) = 1 - [1 - F_X(x)]^n \Rightarrow$

$$\Rightarrow f_{X_{(1)}}(x) = \frac{d}{dx} F_{X_{(1)}}(x) = \frac{d}{dx}\left(1 - (1 - F_X(x))^n\right) =$$

$$= -n\,(1 - F_X(x))^{n-1} \cdot \frac{d}{dx}(-F_X(x)) = n\,[1 - F_X(x)]^{n-1} \cdot f_X(x), \quad F_X(x): \text{κοινή Αθ.Κ.}$$

ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΟΣ ΤΥΧΑΙΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

Έστωσαν οι ανεξάρτητες τμ. $X_1, \dots, X_n$

Ποια η κατανομή του αθροίσματος $T = \sum_{i=1}^{n} X_i$;;

Μέθοδος ροπογεννήτριας συνάρτησης

Υπενθύμιση: Αν W τμ τότε $m_W(t) = E(e^{t\cdot W}) =$

$$= \begin{cases} \sum_{w} e^{tw} \cdot P_W(w), & W \text{ διακριτή} \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{tw} \cdot f_W(w)\,dw, & W \text{ συνεχής} \end{cases}$$

Έτσι,

$$m_T(t) = E(e^{Tt}) = E\left(e^{t \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i}\right) = E\left(e^{tX_1 + \dots + tX_n}\right) =$$

$$= E\left(e^{tX_1} \cdot e^{tX_2} \cdot \dots \cdot e^{tX_n}\right) \stackrel{\text{Ανεξαρτ.}}{=\!=} \prod_{i=1}^{n} E(e^{tX_i}) = \prod_{i=1}^{n} m_{X_i}(t)$$

και εάν ήταν και ισόνομες τότε

$$\prod_{i=1}^{n} m_{X_i}(t) = (m_X(t))^n \quad \text{με } m_X(t): \text{κοινή ροπογεννήτρια}$$

Παραδείγματα

1) Έστω ανεξάρτητες τμ $X_1, \dots, X_n$ με κατανομή Poisson(θ)

Να βρεθεί η κατανομή της τμ. $T = \sum_{i=1}^{n} X_i$

ΛΥΣΗ

$$\left.\begin{array}{l} m_T(t) = \prod_{i=1}^{n} m_{X_i}(t) \\ \text{όμως } X_i \sim \text{Poisson}(\theta) \\ \text{Άρα, } m_{X_i}(t) = e^{\theta(e^t - 1)} \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} m_T(t) = \prod_{i=1}^{n} e^{\theta(e^t-1)} = \\ = \left[e^{\theta(e^t-1)}\right]^n = e^{n\theta(e^t-1)} \end{array}$$

Δηλαδή, η μορφή της m_T ταιριάζει με τη μορφή της ροπογεννήτριας της Poisson κατανομής με παράμετρο $n\theta$. Άρα, από το Θεώρημα μοναδικότητας των ροπογεννητριών:

$$T = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \text{Poisson}(n\theta)$$

2) Εστω ανεξάρτητες τμ. $X_1, \dots, X_n$ με κατανομή $Exp(\frac{1}{\theta})$, θεσ
Νδο $T = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim G(n, \theta)$

3) Έστω ανεξάρτητες και ισόνομες τμ $X_1, \dots, X_n$ με κατανομή Bernoulli (σπ $\theta^x(1-\theta)^{1-x}$, $x=0,1$, $\theta \in [0,1]$
Bernoulli $= B(1,\theta)$) τοτε νδο $T = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim B(n,\theta)$

Οι (2), (3) να γίνουν ως εργασία

4) Εστω ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές
$X_1, \dots, X_n$ με κατανομη $N(\mu, \sigma^2)$
Νδο $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$

ΛΥΣΗ

Αφου, $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ η ροπογεν. $m_{X_i}(t) = e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$

$m_{\bar{X}}(t) := E(e^{t\bar{X}}) = E(e^{t/n \cdot \sum X_i}) = E(e^{t/n \cdot X_1 + \dots + t/n \cdot X_n}) =$

$= E(e^{t/n X_1} \cdots e^{t/n X_n}) \xlongequal{\text{ανεξαρτ}} \prod_{i=1}^{n} E(e^{t/n \cdot X_i}) := \prod_{i=1}^{n} m_{X_i}(\frac{t}{n}) \Rightarrow$

$\Rightarrow m_{\bar{X}}(t) = [m_X(\frac{t}{n})]^n = [e^{\mu \frac{t}{n} + \frac{1}{2}\sigma^2 (t/n)^2}]^n =$

$= e^{n\mu \frac{t}{n} + \frac{1}{2}\sigma^2 (t/n)^2 \cdot n} = e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 \cdot \frac{t^2}{n}} = e^{\mu t + \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{n} t^2}$

Είναι μορφή ροπογεννήτριας της κανονικής κατανομής
$N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$ άρα απο Θεωρ. μονοσ. Ροπογεν. $\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$